Estudios de Administración, vol. 12, Nº 1, 2005

Un modelo de valoración de bonos con rescate anticipado

Augusto Castillo R.
Universidad Católica de Chile

Alejandro Valenzuela D.
Universidad Católica de Chile

Extracto

Aquí se describen distintos tipos de opciones de rescate anticipado que incluyen bonos de empresas. También se presenta un modelo de valoración de bonos con rescate anticipado cuando las tasas de interés siguen un proceso estocástico, inspirado en el modelo de valoración de opciones americanas desarrollado por Longstaff y Schwartz (2001), conocido como algoritmo Least Squares Montecarlo. La metodología propuesta se aplica a la valoración de dos bonos con rescate anticipado del tipo semiamericano, sobre la base de los cuales se desarrolla un análisis de sensibilidad para el valor del bono y para el valor de la opción de rescate.

Abstract

This paper describes different types of callable bonds. It also presents a model to value those callable bonds when interest rates follow a stochastic process, inspired in the model to value American

JEL: C15, C32, G13
Keywords: Opciones Americanas, Bonos, Rescate Anticipado.

options developed by Longstaff and Schwartz (2001), known as the Least Squares Montecarlo algorithm. The proposed methodology is applied to the valuation of two semi American callable bonds. A sensibility analysis is developed for the bond´s values and for the option´s values included in the bonds.

1. Introducción

Los bonos rescatables tienen incluida una opción de pago anticipado por parte del emisor. El valor de esta opción debiera aumentar a medida que baja la tasa de interés, pues mientras menor sea la tasa de interés al momento de rescatar ese bono, mejores serán las condiciones bajo las cuales la empresa será capaz de emitir nueva deuda que la reemplace. Es por esto que la teoría financiera sugiere que mientras más baja esté la tasa de interés, mayor será la probabilidad de que la opción de rescate sea ejercida por la empresa que emitió el bono.

Un bono rescatable es un bono simple (*straight bond*) con una opción que le permite al emisor recomprar o rescatar el bono por un cierto valor, que se conoce como precio de rescate, antes de la fecha de vencimiento del mismo. El que posee la opción es el emisor del bono y, por lo tanto, quien lo adquiera exigirá un descuento por la posición corta que él estará tomando en esa opción.

La idea de este artículo es describir distintos tipos de opciones de rescate anticipado usualmente presentes en los bonos emitidos por empresas, y proponer un modelo de valoración de ese tipo de bonos inspirado en la metodología de valoración de opciones americanas desarrollada por Longstaff y Schwartz (2001).

El modelo que estos autores presentan consiste en una novedosa manera de valorar opciones americanas utilizando para ello una combinación de la técnica de simulación y del método de regresiones conocido como mínimos cuadrados. Este modelo, al que en la literatura se le denomina algoritmo LSM (Least Squares Montecarlo), calcula el valor esperado de una opción en un periodo a partir de los valores del subyacente del período anterior. Para hacer esto, la clave está en estimar la esperanza condicional del pago de la opción usando mínimos cuadrados, lo que equivale a obtener el valor esperado de "continuar" y no ejercer la opción.

Ésta es una metodología nueva y ha sido aplicada principalmente a la valoración de opciones reales como, por ejemplo, en Schwartz (2001). Sin embargo, ésta es la primera vez que se le aplica a la valoración de bonos corporativos.

La opción de rescate anticipado puede ser vista como una opción sobre la tasa de interés incluida en el bono. Cuando la tasa de interés baja, el valor de esta opción aumenta para el emisor, pues el valor presente de los pagos a realizar por él aumenta, mientras que el valor de rescate se mantiene constante. Por otro lado, la opción de rescate puede ser considerada americana o semiamericana, en los casos en que el rescate anticipado puede ejercerse en cualquier instante durante toda la vida del bono, o cuando puede hacerse a partir de o hasta una cierta fecha, respectivamente. Una tercera alternativa es que la opción de rescate anticipado pueda ser ejercida únicamente en ciertas fechas específicas previas al vencimiento del bono.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: En la sección 2 se presenta una revisión bibliográfica en los temas de valoración de bonos, valoración de opciones europeas y americanas, y modelos de tasas de interés. La metodología de valoración de bonos rescatables anticipadamente a utilizar aquí se describe en la sección 3. La sección 4 presenta los resultados de implementar la metodología propuesta a dos ejemplos de bonos rescatables anticipadamente. Las conclusiones se encuentran en la sección 5.

2. Revisión bibliográfica

Los modelos de valoración de bonos pueden dividirse en tres grandes grupos. Un primer grupo está formado por modelos que consideran que la única variable estocástica que debe ser considerada es el valor de los activos de la firma que emite el bono.

Estos modelos consideran la tasa de interés como una variable determinística. Merton (1974) valora un bono cero cupón riesgoso y un bono rescatable anticipadamente utilizando esta premisa; Brennan y Schwartz (1977a) proponen una forma de valorar deuda rescatable anticipadamente y convertible en acciones; Black y Cox (1976) y Geske (1977) valoran bonos con cupones cuando la venta de ciertos activos está restringida, resolviendo adicionalmente la política óptima de *default*, desde el punto de vista de los accionistas de la empresa. En todos estos modelos los bonos son considerados un derivado de los activos de la empresa y valorados mediante la adaptación de modelos de valoración de opciones.

Un segundo grupo de modelos son los que permiten tasas de interés estocásticas, pero asumen que no existe riesgo de no pago. Brennan y Schwartz (1977b) y Courtadon (1982) trabajan con deuda rescatable. Amin y Jarrow (1992), Jorgensen (1997); Ho, Stapleton y Subrahmanyam (1997), y Peterson, Stapleton y Subrahmanyam (1998) también estudian la valoración de bonos sin riesgo de no pago.

El tercer grupo de modelos de valoración son aquellos que consideran tanto el riesgo de no pago como la estocasticidad de las tasas de interés. Brennan y Schwartz (1980); Nielsen, Saa-Requejo y Santa-Clara (1993); Kim, Ramaswamy y Sundaresan (1993), Longstaff y Schwartz (1995), Briys y De Varenne (1997) y Collin-Dufresne y Goldstein (2001), incluyen en sus modelos reglas de quiebra exógenas, reflejadas en valores críticos de activos o niveles críticos de pagos. Ramaswamy y Sundaresan (1986); Madan y Unal (1993), Jarrow y Turnbull (1995), Duffie y Huang (1996); Jarrow, Lando y Turnbull (1997), Duffie y Singleton (1999) y Das y Sundaram (2000) modelan la quiebra a través de un *spread* crediticio estocástico o tasa de riesgo. Castillo (2004) valora bonos corporativos simples y convertibles en acciones, asumiendo que el valor de los activos y la tasa de interés son variables estocásticas. Archarya y Carpenter (2002) valoran bonos corporativos tomando como variables estocásticas la tasa de interés y el valor de los activos a través de un proceso estocástico de dos factores, asumiendo una regla de quiebra endógena.

Los bonos rescatables han sido ampliamente analizados en la literatura. Quizás las mayores aplicaciones a la valoración de estos instrumentos se han realizado por el lado de la teoría de opciones. Según Brennan y Schwartz (1977a), cuando se cumple el teorema de Modigliani y Miller (1958), la estructura de capital y las políticas de financiamiento no afectan el valor de la firma. Si asumimos que la deuda está compuesta por bonos, al minimizar el valor de éstos estaremos automáticamente maximizando el valor del patrimonio. Esto se logra si la política de rescate óptima se fija en el punto en que el valor de mercado del bono se iguala al precio de rescate.

En este artículo se desarrollará un modelo de simulación para la valoración de bonos rescatables, que, además, determine las políticas óptimas de rescate para cada momento del tiempo en función de la tasa de interés existente, esto es, reconociendo que la opción de rescate anticipado corresponde a un tipo de opción americana. En un principio, este modelo asumirá tasas de interés estocásticas sin una regla de quiebra o posibilidad de no pago. Los principales elementos de este modelo son dos: un modelo para representar el proceso estocástico que se asume siguen las tasas de interés, y un método de simulación para valorar opciones americanas.

Los métodos de valoración de activos desarrollados desde el trabajo seminal de Black y Scholes (1973) incluyen métodos tales como árboles binomiales y trinomiales, los métodos de diferencias finitas, y los métodos de simulación tales como el de Montecarlo. Hasta mediados de los años noventa los métodos de valoración de opciones americanas se centraban en los primeros tipos de modelos, dejando los modelos de simulación relegados a la valoración de opciones del tipo europeo. Esto, porque se pensaba que no era posible valorar opciones americanas mediante las técnicas de simulación.

En los métodos de árboles la incertidumbre se representa en un número finito y fijo de estados para cada variable en cada momento del tiempo (en general son dos o tres, que se denominan árboles binomiales y trinomiales, respectivamente). Estos estados se eligen de forma que la distribución de probabilidades del precio del activo calce con la de la variable de estado subyacente. Además, se impone la restricción (sobre las probabilidades de cada estado) de que el retorno esperado sea igual al retorno libre de riesgo, con lo que se logra una función de probabilidades ajustadas por riesgo. Para el caso que nos interesa, que es el de las opciones americanas, su valor se calcula descontando los flujos esperados en cada nodo del árbol, el cual depende de si la opción se ejerce o no, lo que, a su vez se determina comparando el valor de ejercer la opción en un nodo, con el valor esperado de continuar al nodo del período siguiente, descontado por la tasa libre de riesgo. Así se sigue el proceso desde la fecha de vencimiento de la opción y se retrocede luego en el tiempo, hasta llegar al nodo inicial, que corresponde a la fecha en que estamos valorando la opción.

Los métodos de diferencia finita consisten en discretizar todas las variables de estado, definir los valores del activo en las condiciones de borde y reemplazar las primeras y segundas derivadas de la ecuación diferencial del derivado por una aproximación de diferencias finitas. Luego de esto, se puede ir resolviendo hacia atrás, tal como en el caso de los árboles, para obtener los distintos valores del activo en el período cero, en función del valor de las otras variables de estado en ese instante de tiempo.

Los métodos de simulación de Montecarlo suponen fingir trayectorias para las distintas variables relevantes, de acuerdo a procesos estocásticos libres de riesgo definidos previamente. La simulación más estándar consiste en calcular los flujos de caja generados por el activo, descontarlos a la tasa libre de riesgo y luego promediarlos de acuerdo al número de trayectorias, con lo que se obtiene un valor aproximado del activo. Sin embargo, esta simulación no sirve para valorar opciones americanas, y se han tenido que desarrollar nuevos modelos basados en la simulación de Montecarlo, pero complementados con otras herramientas como la programación dinámica, para poder valorar este tipo de activos.

La gran ventaja que ofrecen los métodos de simulación sobre los otros dos procedimientos numéricos está en la facilidad para lidiar con múltiples fuentes de incertidumbre. No se incorpora gran complejidad al aumentar el número de factores de riesgo o las variables subyacentes al activo, ni tampoco lo hace el incorporar cualquier tipo de proceso estocástico.

Existen numerosos modelos desarrollados en los últimos años para valorar opciones americanas a través de simulación de Montecarlo. Entre ellos están los desarrollados por Barraquand y Martineau (1995), Raymar y Zwecher (1997), Broadie y Glasserman (1997) y Longstaff y Schwartz (2001).

Barraquand y Martineau (1995) proponen un modelo de simulación cuya principal característica es discretizar y reducir la dimensionalidad del problema de valoración. Para hacer esto, simulan numerosas trayectorias, y agrupan la variable de estado en distintas celdas o *bins*. Luego, calculan las probabilidades de pasar de un determinado *bin* a otro en el periodo siguiente, para finalmente resolver hacia atrás el valor del activo, tomando cada *bin* como una unidad de decisión. Lo más importante de este modelo es la elección de la variable de estado que representa a todas las variables de estado relevantes. La ventaja de este método está en que permite simplificar el problema y al mismo tiempo obtener buenas aproximaciones del verdadero valor del activo. Los problemas que presenta es que no entrega buenas aproximaciones cuando existe más de una variable de estado muy relevante y, por otra parte, también presenta problemas de convergencia cuando existen áreas óptimas de ejercicio que no se encuentran adyacentes, sino que separadas.

Raymar y Swecher (1997) proponen un modelo similar al anterior, pero solucionando los problemas mencionados. Lo que ellos hacen es agregar una segunda dimensión en la agrupación de *bins*. Hacen la primera agrupación, y luego dentro de cada *bin* se hace una nueva subagrupación con la segunda variable de estado. Además, se realiza una segunda ronda de simulación de trayectorias para calcular las probabilidades neutrales al riesgo de cada *bin*. Una aplicación de esta metodología se encuentra en Castillo (2004), en que se presenta un modelo de valoración de bonos comunes y de bonos convertibles en acciones, modelando la deuda de la empresa como un derivado del valor de los activos y de la tasa de interés.

Broadie y Glasserman (1997) desarrollan un modelo consistente en generar árboles aleatorios de los activos subyacentes y las variables de estado. Luego aplican programación dinámica para valorar los activos. El problema que presenta este método es que como a partir de cada nodo se genera un subárbol independiente, los costos computacionales crecen exponencialmente con el número de fechas de ejercicio posibles.

Longstaff y Schwartz (2001) proponen un modelo que se basa en estimar una función del pago esperado condicional de continuar para cada fecha del tiempo[1]. Así en cada fecha de decisión, se compara este valor descontado con el valor de ejercicio. En cualquier momento en que el valor de ejercicio es mayor que el valor de continuar, la opción debe ser ejercida. Para estimar la función del pago esperado condicional, se simulan las trayectorias, y para cada momento del tiempo (partiendo desde el final hacia el principio), se realiza una regresión tomando como variable dependiente el valor del activo, y como variable independiente, polinomios formados por los activos subyacentes y variables de estado relevantes. Así, el modelo se va resolviendo por inducción hacia atrás en el tiempo, comenzando en la fecha de vencimiento del bono y parando en la fecha en que se desea conocer el valor del bono.

La gran ventaja de este modelo es que trabaja sólo con las trayectorias *in-the-money*, y es computacionalmente muy eficiente, sobre todo con los activos que están *deep-out-of-the-money*. Por otro lado, presenta una gran facilidad para trabajar con problemas multifactoriales. Por último, es un método novedoso, eficiente, intuitivo, y de fácil aplicación para cualquier tipo de problema y de restricción adicional que se le imponga. Dadas sus ventajas sobre los

[1]El algoritmo de este método es denominado por ellos como algoritmo LSM (Least-Squares Montecarlo).

otros métodos conocidos, hemos decidido implementar el algoritmo LSM en este artículo.

Al intentar modelar el proceso estocástico que sigue a la tasa de interés de corto plazo, elemento clave para la valoración de la opción de rescate contenida en ciertos bonos, se presenta el desafío de poder establecer un proceso que pueda describir con precisión la actual estructura de tasas de interés, pero que también pueda modelar la dinámica en el tiempo de esta estructura. En general, los procesos estocásticos de la tasa de interés de corto plazo son *markovianos*, lo que equivale a decir que su comportamiento futuro depende sólo de su valor actual y no de la información pasada.

Existen principalmente dos tipos de modelos de tasas, los modelos de equilibrio y los de no-arbitraje. Los primeros definen un proceso para la tasa de interés de corto plazo a partir de ciertas relaciones con variables económicas. En general, la tasa descrita por estos procesos es la tasa *instantánea* de corto plazo, que se aplica para un período infinitesimal a partir de un determinado momento. El problema de estos modelos es que muchas veces no se ajustan a la actual estructura de tasas de interés. Sin embargo, este problema se soluciona en gran medida cuando se trabaja con modelos multifactoriales. Los modelos de no-arbitraje son desarrollados de forma de ajustarse perfectamente a la actual estructura de tasas. La desventaja que generalmente tienen es que algunos son intratables analíticamente, y otros tienen una dinámica demasiado marcada de acuerdo a la actual estructura de tasas, lo que disminuye el margen de volatilidades que aceptan los modelos.

Los diferentes modelos de equilibrio de un factor pueden resumirse en un proceso general, como el que muestra la ecuación (1), al cual se le van aplicando distintas restricciones:

$$dr = (\alpha + \beta r)\, dt + \sigma\, r^{\gamma}\, dw \qquad (1)$$

donde $(\alpha + \beta r)$ es el valor esperado de los cambios instantáneos en la tasa de interés, también llamado pendiente o componente de tendencia. Este componente generalmente considera una reversión hacia la media. La parte estocástica del proceso viene dada por dw, que es un proceso de Wiener.

Así, imponiendo restricciones a los parámetros α, β y γ, pueden obtenerse, por ejemplo, los modelos de Merton (1973), el de Ornstein-Uhlenbeck usado por Vasicek (1977); el de Cox, Ingersoll y Ross (1985), el de Dothan (1978) y el de Brennan y Schwartz (1980). Las restricciones que generan los mencionados modelos se resumen en la tabla 1.

Tabla 1

Restricciones de modelos de tasa de interés

MODELO	αγ	βγ	γγ
Merton		0	0
Vasicek			0
CIR			0,5
Dothan	0	0	1
Brennan-Schwartz			1

Los principales modelos de no-arbitraje son el de Ho y Lee (1986) y el de Hull y White (1990). El segundo tiene la siguiente forma general:

$$dr = (\theta(t) - ar)\,dt + \sigma\,dw. \qquad (2)$$

El primero es similar, pero con la restricción adicional de suponer $a = 0$. Todos los modelos descritos anteriormente tienen dos limitaciones: incluyen sólo un factor, o sólo una fuente de incertidumbre, y no dan completa libertad para escoger la estructura de volatilidad. Los modelos multifactoriales eliminan estas limitaciones, aunque tienen aun mucho mayor costo computacional.

En este artículo hemos decidido utilizar el modelo de Vasicek, el que es ampliamente utilizado en la literatura de valoración de bonos.

3. Metodología

Este trabajo necesita de un método perteneciente a algún procedimiento numérico para valorar opciones americanas, ya que las ecuaciones diferenciales que representan a esas opciones americanas en este caso no tienen solución analítica.

Dentro de los modelos de valoración de opciones americanas, Longstaff y Schwartz (2001) proponen un modelo de simulación que se basa en estimar una función del pago esperado condicional de continuar para cada fecha del tiempo. Así en cada fecha de decisión, se compara este valor descontado con el valor de ejercicio. En cualquier momento en que el valor de ejercicio es mayor que el valor de continuar, la opción debe ser ejercida. Para estimar la función del pago esperado condicional, se simulan las trayectorias, y para cada momento del tiempo (partiendo desde el final hacia el principio), se realiza una regresión tomando como variable dependiente el valor descontado de continuar de cada simulación, y como variable independiente, polinomios formados por los activos subyacentes y variables de estado relevantes. Así, el modelo se va resolviendo por inducción hacia atrás[2].

La gran ventaja de este modelo es que, al trabajar sólo con las trayectorias *in-the-money*, es computacionalmente muy eficiente, sobre todo con los activos que están *deep-out-of-the-money*, que es el caso de gran parte de los bonos corporativos. Por otro lado, este método presenta una gran facilidad para trabajar con problemas multifactoriales. Por último, es un método novedoso, eficiente, intuitivo, y de fácil aplicación para cualquier tipo de problema y de restricción que se le imponga.

[2]Para mayores detalles sobre este método, ver el anexo 1.

La aplicación del algoritmo LSM realizada en este artículo contiene una serie de supuestos, los que a continuación se explicitan: Primero, la estructura de tasas de interés reales libres de riesgo viene especificada por un modelo dinámico para la tasa de interés instantánea. Se utiliza un modelo de Vasicek de un factor, de la forma:

$$dr_t = (\alpha + \beta r_t)\, dt + \sigma\, dw_t \qquad (3)$$

donde $(\alpha + \beta r)$ es el componente de tendencia, que refleja una reversión hacia la media α. La parte estocástica del proceso viene dada por dw, que es un proceso de Wiener. Este modelo es ampliamente utilizado en la literatura, y posee características muy deseables, como reversión a una media de largo plazo y el permitir tasas de interés negativas, que para el caso de tasas de interés reales se dan con cierta frecuencia. Además, tiene la ventaja de ser tratable analíticamente. Para mayores detalles del modelo de Vasicek ver anexo 2.

Los otros supuestos que se hacen en este artículo son: no se asume una regla de quiebra ni una posibilidad de no pago[3]. No existen impuestos personales ni corporativos. Para calcular el valor de una opción americana, se asume que la decisión de rescate se evalúa una vez por mes.

Dados el modelo y los supuestos establecidos, la metodología presenta algunas limitaciones. Lo primero es que los resultados son bastante sensibles a los parámetros utilizados en modelos de tasas de interés, especialmente a cambios en la tendencia de largo plazo.

[3]En este modelo se desea representar a los bonos como un derivado de la tasa de interés y por lo mismo se asume que el pago de los bonos no depende del valor que los activos de la empresa posean al momento de vencer la deuda. Este modelo es entonces aplicable a bonos estatales o con aval del Estado o a bonos corporativos de muy bajo riesgo. No se le puede aplicar a la valoración de bonos de bajo *rating* como los bonos basura, por ejemplo.

Lo segundo tiene relación con el modelo de tasas de interés escogido, perteneciente a los modelos de equilibrio. Muchas veces este tipo de modelos, aunque tienen la ventaja de modelar bien su dinámica, no se ajustan a la actual estructura de tasas de interés. Este problema se podría solucionar con modelos multifactoriales. Sin embargo, el problema que se presenta es que en general los factores no son observables, con lo que tampoco se podría observar la serie de tasas efectivas, lo que llevaría a que el análisis fuera imposible de realizar.

Tal como se mencionó anteriormente, el algoritmo de Longstaff y Schwartz (LSM) se basa en calcular el pago condicional esperado descontado de continuar, el cual, al compararse con el valor de mercado va determinando las políticas óptimas de ejercicio. La implementación del algoritmo debe seguir una serie de pasos, que son los que se detallan a continuación. Este proceso se desarrolla para valorar el bono y la opción de rescate que tiene incluida.

A. Simulación de las trayectorias

Las trayectorias de las tasas de interés instantáneas libres de riesgo son simuladas a partir del proceso de Vasicek de un factor en un número suficientemente grande (*M*). El proceso de tasas puede ser discretizado de la siguiente forma:

$$\Delta r = \left[\theta(\hat{\mu} - r)\right]\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z \qquad (4)$$

con $Z \sim IIN(0,1)$, y Δt una discretización del tiempo. El número de discretizaciones simuladas son las necesarias para cubrir la madurez del bono. Sin embargo, esta forma de discretizar el proceso para la tasa instantánea es adecuado sólo en la medida que la discretización de tiempo sea muy pequeña. Otra forma de simular tasas, que es computacionalmente más eficiente y donde la magnitud de la discretización no es importante, es la siguiente:

$$r_T = E_t\left[r_T \middle| r_t\right] + \sigma_t\left[r_T\right]Z \qquad (5)$$

donde:

$$E_t\left[r_T \middle| r_t\right] = e^{-\theta(T-t)} r_t + (1 - e^{-\theta(T-t)})\hat{\mu} \qquad (6)$$

y:

$$\sigma_t^2\left[r_T\right] = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\theta(T-t)}}{2\theta}. \qquad (7)$$

En las simulaciones denominamos $r_j(t_i)$ al valor que toma la tasa en la trayectoria *j* para el tiempo *i*, con $j = 1, 2, ..., M$ e $i = 1,2,..., N$.

B. Desarrollo de la matriz de pagos de la opción

Denominamos $\mathbf{P}$ a la matriz de pagos de $M \times N$ elementos, con su elemento típico p_{ji}. Esta matriz tiene incluidos todos los pagos que debe efectuar el bono (los cupones) y las ganancias (expresadas como pago negativo) de un posible refinanciamiento. Por lo tanto, se hace el supuesto de que, en caso de rescate, la firma emite en el mismo momento del rescate un bono con cupones iguales a los que quedaban por pagar del bono rescatado. Esto significa obtener una ganancia equivalente a la diferencia entre el valor de mercado del bono (sin una opción de rescate), y el valor de rescate más los costos involucrados en la nueva emisión, todo esto en el momento del rescate.

La matriz $\mathbf{P}$ puede dividirse en dos matrices. Una que contiene los pagos de los cupones (en la que, por lo tanto, todas las filas son iguales) del bono original, que llamaremos $\mathbf{B}$, con un elemento típico b_{ji}, y otra que contiene las ganancias del refinanciamiento, que llamaremos $\mathbf{C}$, con un elemento típico c_{ji}. Por lo tanto, tenemos la igualdad:

$$\mathbf{P} = \mathbf{B} - \mathbf{C} \tag{8}$$

o, más específicamente:

$$p_{ji} = b_{ji} - c_{ji}\,. \tag{9}$$

La opción de rescate del bono estará *in-the-money*, si la diferencia entre el dinero que se recibe y el que se paga por el refinanciamiento es positivo. Esto ocurre cuando:

$$\text{Valor de mercado} > \text{Valor de rescate} \tag{10}$$

donde el valor de mercado corresponde a la multiplicación de los cupones restantes por los precios de los bonos cero, derivados a partir de la estructura de tasas.

Definimos la variable: $A_j(t_i)$ = Valor de mercado – Valor de rescate, de la trayectoria *j* en el tiempo *i*. Depende de la trayectoria, puesto que el valor de mercado depende de la tasa de interés vigente en ese momento.

Luego, se empieza a trabajar para llenar la matriz $\mathbf{C}$, lo que se hace comenzando desde la fecha de vencimiento de la deuda y retrocediendo en el tiempo a partir de esa fecha hasta llegar al presente. Para el tiempo $t_N = T$, día en que vence el bono, el valor de la opción contenida en él vale 0. Luego, en este momento del tiempo no se pueden realizar regresiones, pues todos los coeficientes tendrían un valor igual a cero. Así, se busca hacia atrás el primer período de tiempo t_{N^*} en que existe una cierta cantidad de trayectorias *in-the-money* (para este trabajo se exigió que al menos un 0,1% de las trayectorias cumpliera esta condición).

Después, para cualquier tiempo t_i tal que $0 < i < N^* < N$, se usan mínimos cuadrados para estimar la esperanza condicional dado que la opción de rescate está *in-the-money*. Para hacer esto, lo primero es trabajar sólo con las trayectorias que tienen la característica anterior.

Definimos $\tilde{M}$ tal que $\tilde{M} = \{j\colon A_j(t_i) > 0; 1 \le j \le M\}$. Para cada $j \in \tilde{M}$, el pago descontado de continuar manteniendo el bono es:

$$y_j(t_i) = \sum_{n=i+1}^{N} \exp\left(-\sum_{k=i+1}^{n} r_j(t_k) \right) c_{jn} . \qquad (11)$$

Ésta es la variable dependiente de la regresión. Como variables independientes, se define un vector $X_j(t_i)$ que corresponde a una transformación ($g(\bullet)$) del vector de las variables de estado, que en este caso corresponde a la tasa de interés. Stentoft (2004) señala que para esta transformación pueden utilizarse polinomios simples. Para
este caso se utilizaron las tres primeras funciones base[4]. Entonces, definimos las variables independientes como:

$$X_j(t_i) = g(r_j(t_i)) . \qquad (12)$$

Con todas estas expresiones, ahora se puede estimar la esperanza condicional $h(r_j(t_i)) \equiv E\left[y_j(t_i) \middle| r_j(t_i) \right]$ de la siguiente forma:

$$\hat{h}(r_j(t_i)) = X_j(t_i)\beta(t_i) , \qquad (13)$$

donde $\beta(t_i)$ es el vector de coeficientes que corresponde al modelo clásico de regresión lineal

$$y_j(t_i) = X_j(t_i)\beta(t_i) + u_j(t_i) \qquad (14)$$

y que puede ser estimado de la siguiente forma:

$$\hat{\beta}(t_i) = \left(X(t_i)' X(t_i) \right)^{-1} X(t_i)' y(t_i) . \qquad (15)$$

[4]Por tanto, la regresión fue de la forma: $y_j(t_i) = \beta_0 + \beta_1 r_j(t_i) + \beta_2 r_j(t_i)^2 + \beta_3 r_j(t_i)^3$

Ahora que ya se puede obtener el valor ajustado $\hat{y}_j(t_i) = X_j(t_i)\hat{\beta}(t_i)$, que corresponde a la estimación de la esperanza condicional del valor de continuar, podemos determinar para cada tiempo, para cada trayectoria, si conviene ejercer la opción de rescate o continuar. Para esto se compara este valor ajustado con $A_j(t_i)$. Si este último es mayor, y dado que esta opción americana puede entregar un solo flujo durante su vida, se establece $c_{ji} = A_j(t_i)$, y todos los otros valores de esa fila c_{jn}, con $i < n \leq N$, pasan a ser ceros. En caso contrario, se fija $c_{ji} = 0$. Así, los elementos de la matriz $\mathbf{C}$ se completan de la siguiente forma:

$$c_{ji} = \begin{cases} A_j(t_i) \text{ y } c_{jn} = 0, i < n \leq N; \text{ si } A_j(t_i) > \hat{y}_j(t_i) \\ 0; \text{ en otro caso} \end{cases}, \quad j \in \tilde{M} \qquad (16)$$

a partir de lo cual se puede calcular la matriz $\mathbf{P}$[5].

Es interesante recalcar que puede obtenerse un $r^*(t_i)$, tal que $\hat{y}^*(t_i) = X^*(t_i)\hat{\beta}(t_i) = R^*(t_i)$, con $X^*(t_i) = g(r^*(t_i))$. Estas son las tasas críticas para un rescate anticipado.

C. *Cálculo del valor del bono*

Para calcular el valor del bono, el último paso es descontar los flujos de la matriz $\mathbf{P}$, y luego sacar un promedio del valor de las trayectorias. Esta expresión puede ser calculada de la siguiente forma:

$$\tilde{P}_M = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\left(b_{ji} - \max(c_{ji}, 0)\right)P(0,i) \qquad (17)$$

[5]En este modelo se asume una regla racional de rescate anticipado. Esto es, que la empresa rescatará para evitar que el valor del bono supere su valor de rescate. La evidencia empírica sugiere que esta regla no se aplica exactamente así en el mundo real, lo que pudiera ser motivado por la existencia de costos adicionales en la forma de castigos que el mercado puede imponer al refinanciamiento y que no se han considerado en este modelo. Incluir esos potenciales costos en la regla de decisión debiera ser relativamente simple.

donde $P(0,i)$ corresponde al precio de los bonos cero cupón calculados con la estructura de tasas.

4. Resultados y análisis

En esta sección implementamos la metodología descrita a la valoración de dos bonos con vencimiento en 12 y 21 años más, suponiendo en ambos casos que la opción de rescate anticipado puede ser ejercida a partir del año tres. Se decidió tratar esta opción como una del tipo semiamericana, que puede ser ejercida únicamente en las fechas de pago de los cupones, es decir, dos veces por año.

A. Casos Base

Los principales supuestos de parámetros para la valoración de estos bonos se resumen en la tabla 2.

Tabla 2

Parámetros del modelo

PARÁMETROS	BONO 12	BONO 21
Principal (en UF)	100	100
Tamaño cupones en UF	3.5	3.5
Plazo	12 años	21 años
Fecha inicio opción rescate	Año 3	Año 3
Tasa interés inicial (anual)	0.07	0.07
Tasa de largo plazo (anual)	0.06	0.06
Velocidad de ajuste tasa	0.40	0.40
Volatilidad	0.04	0.04

Utilizando el modelo descrito se obtienen los siguientes resultados para los bonos definidos anteriormente, ver tabla 3.

Tabla 3

Valor de los bonos y de las opciones de rescate

BONO 12		BONO 21	
VALOR BONO	VALOR OPCIÓN RESCATE	VALOR BONO	VALOR OPCIÓN RESCATE
98.67	5.07	97.88	9.60

En ambos casos los bonos poseen un valor bajo par, y en ambos casos esto se explica por la presencia de la opción de rescate anticipado. En el bono de mayor plazo la opción de rescate anticipado es más valiosa, pues es más probable que esta opción sea ejercida. Esto provoca un menor valor para el bono de largo plazo debido a que la opción de rescate anticipado es una opción en manos del emisor del bono y que le resta valor al bono desde el punto de vista del poseedor del mismo.

A continuación exploraremos qué tan sensible es el valor de estos bonos a ciertos parámetros utilizados en el modelo.

B. Análisis de sensibilidad

En esta sección se explora la sensibilidad del valor de los bonos y la sensibilidad del valor de las opciones de rescate anticipado que éstos incluyen, a ciertos parámetros clave en el modelo de valoración presentado. Los parámetros analizados son la tasa de interés inicial, la tasa de interés de largo plazo, la velocidad de ajuste en la tasa de interés y la volatilidad de la tasa de interés.

En las figuras 1a y 1b se muestra la sensibilidad de los bonos y de las opciones de rescate anticipado que ellos incluyen, al valor elegido para la tasa de interés inicial. Es posible apreciar que el valor de la opción de rescate anticipado muestra muy poca dependencia de la tasa de interés inicial, lo que se explicaría, porque la opción de rescate no puede ser ejercida de inmediato, sino que a partir de tres años más, por lo que variaciones en el valor de la tasa de interés inicial no tienen un efecto significativo en los niveles que esas tasas mostrarán a partir de tres años más.

De todas maneras se aprecia una ligera relación decreciente entre la tasa de interés inicial y el valor de la opción de rescate, pues a mayor tasa de interés inicial menor debiera ser la probabilidad de que la opción sea rescatada en el futuro. Notar que el menor valor de esta opción de rescate debiera traducirse en un mayor valor del bono por esta misma razón.

Las figuras 1a y 1b muestran la sensibilidad de los bonos a variaciones en la tasa de interés inicial. En ellas se aprecia que el valor de los bonos disminuye a medida que aumenta la tasa de interés inicial. Esto es razonable dado que el valor de los bonos corresponde al valor presente de los flujos que se espera recibir de ellos, y una menor tasa de interés inicial provocará menores valores presentes de esos flujos.

Figura 1a

Sensibilidad a la tasa de interés inicial del bono 12

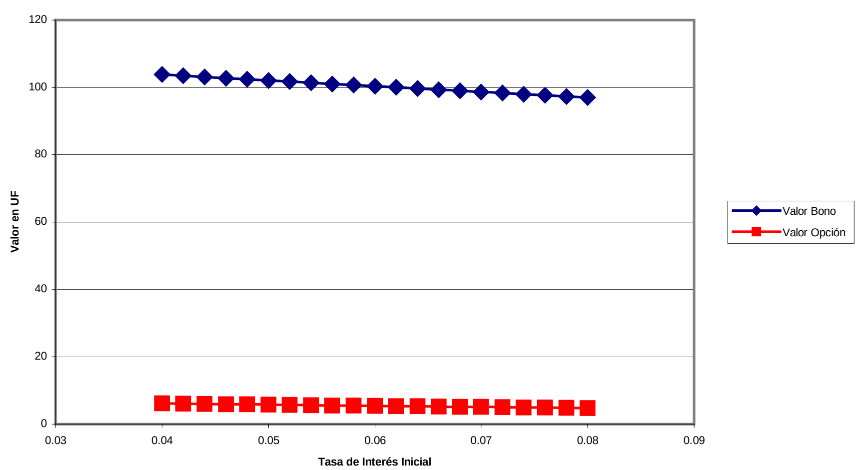
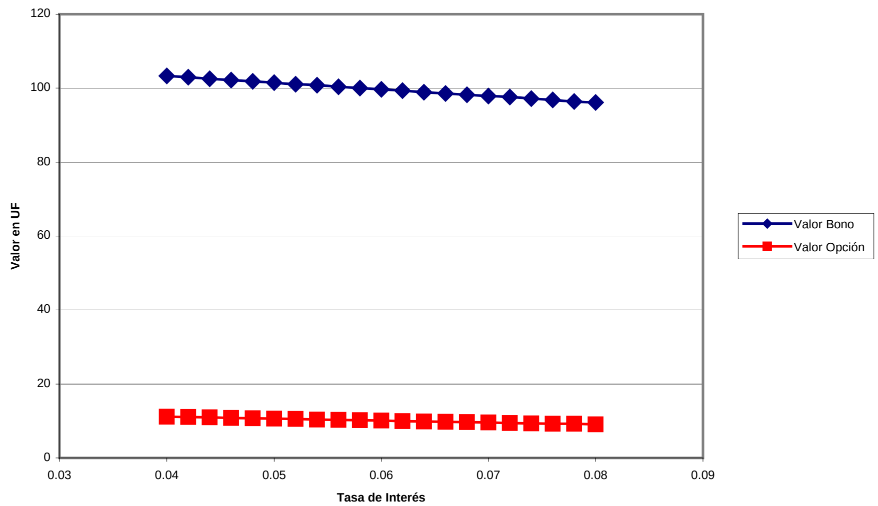


Figura 1b

Sensibilidad a la tasa de interés inicial del Bono 21



Un segundo efecto sobre el valor del bono debiera ser provocado por la disminución en el valor de la opción de rescate anticipado a medida que aumenta la tasa de interés inicial. Este segundo presionará hacia arriba el valor del bono, pero la magnitud de este segundo efecto es mucho menor que la magnitud del primero.

Las figuras 2a y 2b muestran la sensibilidad de los bonos y de las opciones de rescate anticipado ante variaciones en la tasa de interés de largo plazo.

A mayores tasas de interés de largo plazo, menor es el valor de las opciones de rescate anticipado, pues el rescate anticipado sólo ocurre si las tasas de interés caen lo suficiente a partir del tercer año. Una tasa de interés de largo plazo más alta hace menos probable que las tasas de interés futuras caigan a los niveles en que el rescate anticipado es conveniente y, por lo mismo, el valor de estas opciones decrece con aumentos en esta tasa de interés de largo plazo.

Figura 2a

Sensibilidad a la tasa de interés de largo plazo del Bono 12

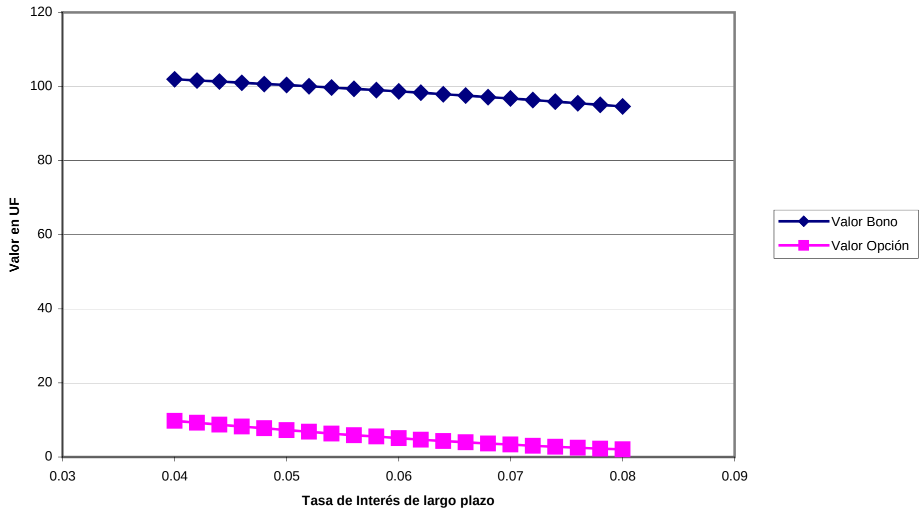
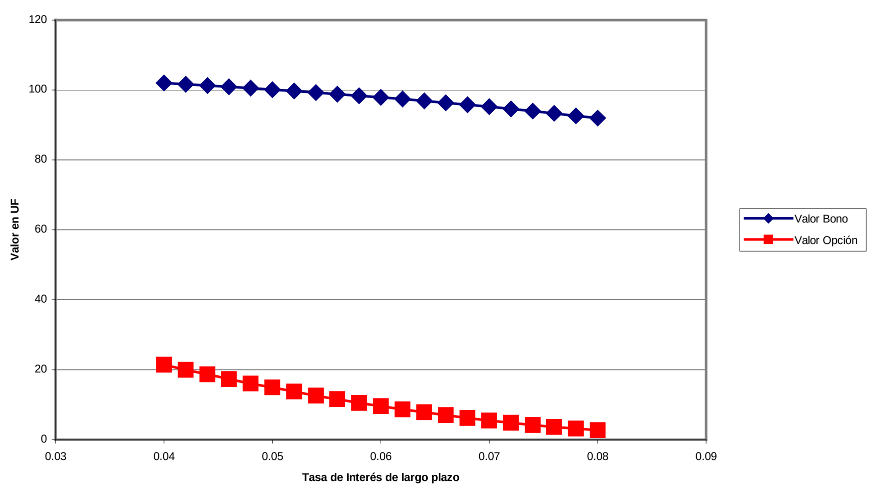


Figura 2b

Sensibilidad a la tasa de interés de largo plazo del Bono 21



En cuanto al efecto de la tasa de interés de largo plazo en el valor de los bonos en las figuras 2a y 2b se observa una relación contraria entre ambas variables. Esto se explicaría, porque mientras mayor sea la tasa de interés de largo plazo, mayores serán las tasas de interés que se obtendrán al simular las trayectorias de las tasas de interés. Y a mayores tasas de interés menor será el valor presente de los flujos que ofrece el bono.

Un segundo efecto que mueve el precio del bono en la dirección contraria, sin embargo, es el que produce esta mayor tasa de interés de largo plazo en el valor de la opción de rescate anticipado. A diferencia del caso de las tasas de interés iniciales, ahora la incidencia de la tasa de interés de largo plazo en el valor de la opción es mayor, pero sigue siendo una relación contraria, pues mientras mayor sea la tasa de interés de largo plazo menor será el valor de la opción y esto provocará mayores precios del bono rescatable anticipadamente.

Las figuras 2a y 2b muestran, sin embargo, que el efecto neto de las dos fuerzas opuestas que afectan el valor del bono no son de igual magnitud y que domina el efecto de descontar los flujos a mayores tasas sobre el efecto de reducción en el valor de la opción de rescate anticipado.

Las figuras 3a y 3b muestran la sensibilidad del valor de los bonos y la sensibilidad del valor de las opciones de rescate anticipado ante distintas magnitudes para el parámetro de velocidad de ajuste de la tasa de interés.

El valor de ambas opciones de rescate anticipado decrece al aumentar la velocidad de ajuste de las tasas de interés, lo que se debería a que mientras más rápido se ajusten las tasas de interés a su valor de largo plazo menor será la volatilidad que estas tasas exhiban. Y como sabemos el valor de una opción depende directamente de la volatilidad del subyacente.

Figura 3a

Sensibilidad a la velocidad de ajuste de la tasa de interés del Bono 12

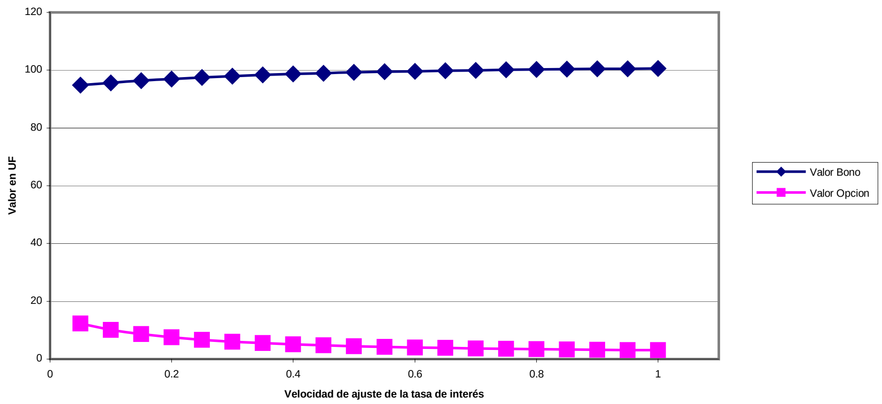
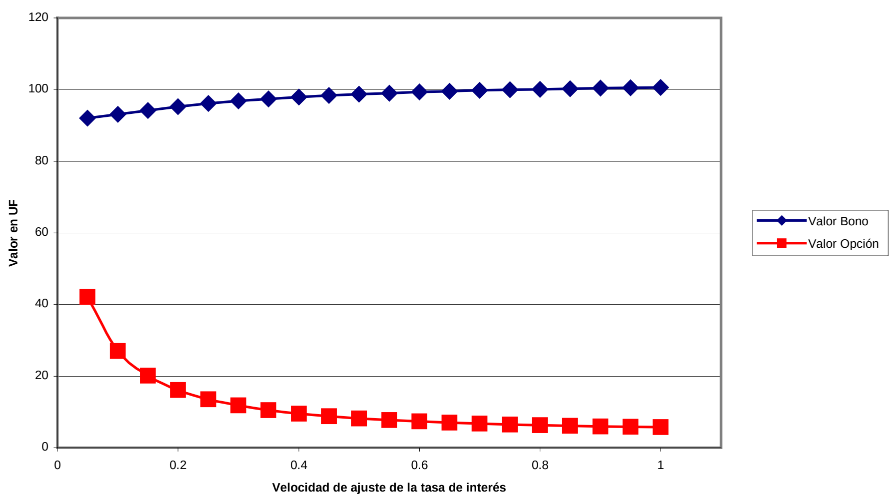


Figura 3b

Sensibilidad a la velocidad de ajuste de la tasa de interés del Bono 21



Para ambos bonos se observa que mayores velocidades de ajuste producen un mayor valor del bono. Existen dos razones por las cuales esta relación coincide con la esperada. La primera es que como en el caso base la tasa de interés inicial es de 7% y la tasa de interés de largo plazo es de 6%, entonces una mayor velocidad de ajuste provocará que las tasas de interés simuladas se acerquen más rápidamente al nivel de largo plazo que en este caso es menor que el nivel inicial. Las menores tasas de descuento tendrán entonces un efecto positivo en el valor de los bonos.

La segunda razón por la que el valor de los bonos debiera aumentar con mayores velocidades de ajuste es que esa mayor velocidad de ajuste reduce la volatilidad de las tasas de interés. Al reducir la volatilidad de las tasas de interés eso reduce el valor de las opciones de rescate anticipado y esto, a su vez, provoca un aumento en el valor de los bonos.

Entonces los dos efectos identificados presionan el valor de los bonos en la misma dirección, haciendo que a mayor velocidad de ajuste el precio de los bonos sea cada vez mayor.

Las figuras 4a y 4b muestran las sensibilidades del valor de los bonos y del valor de las opciones de rescate anticipado a variaciones en el parámetro de la volatilidad de la tasa de interés. El valor de las opciones de rescate anticipado aumenta considerablemente a medida que la volatilidad de la tasa de interés aumenta, lo que es absolutamente consistente con lo que los modelos de valoración de opciones sugiere. Un aumento en la volatilidad de la variable subyacente eleva el valor de las opciones.

El valor de los bonos muestra una baja dependencia de la volatilidad de la tasa de interés. La relación que se observa, sin embargo, es intrigante, pues a mayor volatilidad de la tasa de interés el valor de los bonos en un comienzo decrece levemente, pero luego esa relación se reversa y se aprecia un leve aumento en el valor del bono a medida que aumenta la volatilidad de la tasa de interés.

Esto sugiere que existirían al menos dos efectos que están interactuando y que tendrían efectos contrarios en el valor de estos bonos. El primer efecto sería el que tiene en el valor del bono el valor de la opción de rescate anticipado. Si el valor de la opción de rescate anticipado aumenta a mayor volatilidad, esto debiera provocar una caída en el valor del bono. Esto es precisamente lo que se observa en un comienzo.

Un segundo efecto sería el que provoca la mayor volatilidad de la tasa de interés en el valor presente de los flujos del bono, independiente de si posee o no una opción de convertibilidad. A mayor volatilidad de la tasa de interés se asocia un mayor valor del bono, pues no es simétrico el efecto en el valor del bono que un alza en la tasa de interés genera con respecto al efecto que genera una disminución de la tasa de interés. Caídas en la tasa de interés hacen que el precio del bono suba más de lo que ese precio cae si la tasa de interés aumenta en igual magnitud.

Las figuras 4a y 4b indican que estos dos efectos prácticamente se anulan entre sí, generando la evolución ya descrita en el valor del bono rescatable anticipadamente.

Figura 4a

Sensibilidad a la volatilidad de la tasa de interés del Bono 12

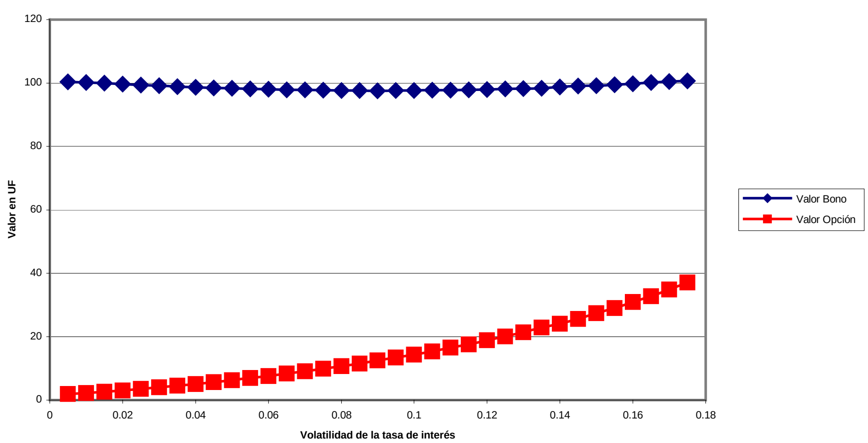
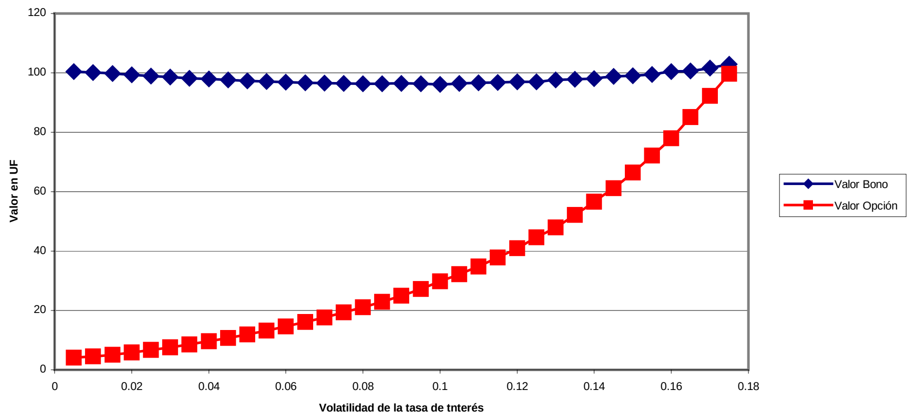


Figura 4b

Sensibilidad a la volatilidad de la tasa de interés del Bono 21



5. Conclusiones

En este artículo se describen distintos tipos de opciones de rescate anticipado que incluyen los bonos de empresas. Esas opciones de rescate anticipado pueden ser del tipo americano o semiamericano. Una tercera alternativa son las opciones de rescate que sólo pueden ser ejercidas en ciertas fechas específicas durante la vida del bono.

En este artículo también se presenta un modelo de valoración de bonos con rescate anticipado cuando las tasas de interés siguen un proceso estocástico, inspirado en el modelo de valoración de opciones americanas desarrollado por Longstaff y Schwartz (2001) y conocido como algoritmo LSM (Least Squares Montecarlo). Éste es un procedimiento bastante nuevo y hasta donde hemos podido comprobar este trabajo constituye la primera aplicación de esta novedosa metodología a la valoración de bonos de empresas.

La metodología es descrita y aplicada al caso concreto de dos bonos con rescate anticipado a partir de una cierta fecha futura, es decir, de un bono que incluye una opción semiamericana. Los bonos son aquí modelados como activos derivados de la tasa de interés.

En la parte final del artículo se exploran la relación entre el valor del bono, el valor de la opción de rescate y ciertos parámetros clave en el proceso que se supone para la tasa de interés. Esos parámetros son las tasas de interés inicial y de largo plazo, la velocidad de ajuste en la tasa de interés y la volatilidad de la tasa de interés.

Extensiones de este trabajo debieran centrarse en testear el modelo aquí descrito, y en extender esta metodología a la valoración de otro tipo de bonos que incluyan otro tipo de opciones como bonos convertibles en acciones, por ejemplo. Para explotar las ventajas de la metodología se debe explorar su aplicación a derivados en que las fuentes de incertidumbre sean muchas.

Anexo 1

El Algoritmo de Longstaff y Schwartz

A continuación se describe de forma general el algoritmo de Longstaff y Schwartz. Para partir, se asume un espacio completo de probabilidades subyacentes (Ω, $\Im$, P) y un horizonte de tiempo finito [0, T], donde el espacio de estados Ω es el conjunto de todas las posibles realizaciones de la economía estocástica entre el tiempo 0 y T, las cuales tienen un elemento típico ω que representa una trayectoria. $\Im$ es el campo de todos los eventos distinguibles hasta el tiempo T, y P es una medida de probabilidad definida sobre los elementos de $\Im$. Además, se asume la existencia de una medida de martingala equivalente Q para esta economía.

Se incorpora la notación $C(\omega, s; t, T)$, para denotar el patrón de flujos de caja generados por la opción (representada por la trayectoria ω), condicional a que la opción no sea ejercida antes del tiempo t, y a que el dueño de la opción siga una política de rescate óptima para todo tiempo s, tal que $t < s \leq T$. Esta función es equivalente a las matrices de flujos de caja intermedias obtenidas en el ejemplo. Es claro que para cada trayectoria el patrón de flujos corresponde a un sólo pago en algún momento del tiempo.

Si suponemos que la opción puede ejercerse en K fechas $0 < t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \ldots \leq t_K = T$, podría decirse que es americana, si tomamos un valor de K que sea suficientemente grande, es decir, si la distancia entre cada fecha es suficientemente pequeña.

En la última fecha, la opción se ejercerá si tiene algún valor. Pero si estamos en una fecha anterior a la fecha de vencimiento t_k de la opción, se debe elegir entre ejercer la opción, o continuar con la opción y revisar la decisión nuevamente en el siguiente período. El valor de la opción se maximiza, si el dueño de ella la ejerce en el momento en el cual el valor de ejercerla es igual o mayor que el valor de continuar. Sólo en el caso en que el valor de ejercerla es mayor, el patrón de flujos de esa trayectoria $C(\omega, s; t, T)$ cambia, incluyendo este valor de rescate en la fecha que se está analizando.

De lo contrario, el patrón de flujos continua inalterado. Para calcular el valor de continuar (o de ejercerla después de t_k) utilizamos un supuesto de arbitraje, que nos dice que este valor debe ser igual a la esperanza de los flujos de caja descontados faltantes $C(\omega, t_k; t, T)$, con respecto a la medida de precios neutrales al riesgo Q. Analíticamente, el valor de continuar $F(\omega, t_k)$ en la fecha t_k puede escribirse de la siguiente forma:

$$F(\omega, t_k) = E_Q\left[\sum_{j=k+1}^{K} \exp\left(-\int_{t_k}^{t_j} r(\omega, s)\,ds\right) C(\omega, t_j; t_k, T) \,\middle|\, \Im_{t_k}\right] \quad \text{(A1)}$$

donde $r(\omega, s)$ es la tasa de descuento estocástica libre de riesgo, Por otro lado, la esperanza es condicional en el set de información $\Im_{t_k}$ disponible en el tiempo t_k. Para obtener el valor final de la opción, este patrón de flujos $C(\omega, s; t, T)$ debe irse determinando periodo a periodo, desde adelante hacia atrás, hasta llegar al periodo inicial. Aquí, el promedio de las trayectorias de los flujos de caja descontados nos entrega el valor de la opción

El punto central de algoritmo LSM está en utilizar mínimos cuadrados para aproximar la función de esperanza condicional para cada período. Los derivados que nos interesa estudiar son aquellos cuyos pagos pertenecen a las funciones de varianza finita o al espacio integrable cuadrado $L^2(\Omega, \Im, Q)$. Este espacio tiene una base ortonormal, y la esperanza condicional puede ser expresada como una combinación lineal de funciones base ortonormales. Esto es:

$$F(\omega, t_k) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j f_j(x) \quad \text{(A2)}$$

que puede aproximarse por

$$F_M(\omega, t_k) = \sum_{j=0}^{M} a_j f_j(x)\,. \quad \text{(A3)}$$

Algunas posibles alternativas como funciones base son las familias de polinomios Laguerre, Hermite, Legendre y Chebyshev.

No existe un criterio fijo para determinar qué familias de polinomios ni cuántas funciones base utilizar (M en la ecuación (A3)). Sin embargo, Moreno y Navas (2003) concluyen que para derivados simples los resultados son similares con todas las familias de polinomios. Además, las diferencias entre los resultados son insignificantes cuando se usan más de cuatro funciones base.

Anexo 2

Modelo de Vasicek

Antes de especificar el proceso estocástico que sigue, la tasa de interés instantánea o de corto plazo en este modelo, es importante entender con claridad las relaciones existentes entre las tasas cero, el precio de los bonos y las tasas instantáneas.

1. Relación entre la dinámica de las tasas de interés y su estructura

La dinámica que sigue un depósito que paga la tasa efectiva y que se renueva continuamente entre los periodos *t* y *T* es:

$$B(t,T) = e^{\int_t^T r(s)ds} \qquad \text{(B1)}$$

Por motivos de arbitraje, el precio de un bono de descuento que en el periodo *t* promete entregar $1 en *T*, debe ser igual al valor esperado del flujo descontado, menos el premio por riesgo que exige el mercado:

$$P(t,T) = E[e^{-\int_t^T r(s)ds}] - \pi(t,T,r(t)) \qquad \text{(B2)}$$

Sin embargo, también existe otro método de valoración, que es el más utilizado en el área de derivados. Este consiste en obtener una esperanza a través de una pseudoprobabilidad o probabilidad ajustada por riesgo, medida artificial que asume que los agentes son neutrales al riesgo. Además, todos los activos deben rentar la tasa libre de riesgo. De esta forma, el precio del bono será la esperanza del flujo descontado bajo probabilidades ajustadas por riesgo, que consideran el proceso estocástico de la tasa de interés. Esto es:

$$P(t,T) = E^*[e^{-\int_t^T r(s)ds}]. \qquad \text{(B3)}$$

Por otro lado, la estructura de tasas cero $R(t,T)$ en el momento t se obtiene a partir de los precios de los bonos:

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}. \qquad \text{(B4).}$$

A partir de lo cual obtenemos:

$$R(t,T) = -\frac{1}{(T-t)} \ln P(t,T) \qquad \text{(B5)}$$

Por último, la evolución de las tasas cero dependerá de la evolución que vaya teniendo la tasa de interés. Esto puede representarse en la siguiente ecuación:

$$R(t,T) = -\frac{1}{(T-t)} \ln E^*[e^{-\int_t^T r(s)ds}]. \qquad \text{(B6)}$$

De aquí podemos afirmar que toda la estructura de tasas será determinada por el proceso de tasas de corto plazo ajustado por riesgo.

2. El modelo de Vasicek de un factor

Tal como se mencionó anteriormente, el modelo de Vasicek que representa el proceso estocástico de la tasa de interés instantánea tiene la forma:

$$dr_t = (\alpha + \beta r_t)\, dt + \sigma\, dw_t \qquad \text{(B7)}$$

el cual también puede escribirse de la siguiente forma:

$$dr_t = -\beta(-\frac{\alpha}{\beta} - r_t)\,dt + \sigma\,dw_t\,. \tag{B8}$$

Si definimos las variables $\mu = -\frac{\alpha}{\beta}$ y $\theta = -\beta$, la ecuación anterior queda así:

$$dr_t = \theta(\mu - r_t)\,dt + \sigma\,dw_t \tag{B9}$$

la que puede visualizarse más fácilmente como un proceso con reversión a la media (si suponemos $\beta < 0$ y $\alpha \geq 0$). La velocidad de convergencia corresponde entonces a θ.

Tal como vimos anteriormente, para poder valorar un derivado con mayor facilidad, necesitamos los procesos ajustados por riesgo. El ajuste en la ecuación anterior debe hacerse sobre el componente de tendencia, restando el premio por la volatilidad de tasas. Esto nos lleva a la siguiente ecuación:

$$dr_t = \left[\theta(\mu - r_t) - \lambda\sigma\right]dt + \sigma\,dw_t\,. \tag{B10}$$

Aquí, el valor de λ es equivalente al premio que entrega el mercado por unidad de volatilidad. Si definimos una nueva variable $\hat{\mu} = \mu - \frac{\lambda\sigma}{\theta}$, entonces la ecuación puede reescribirse de la siguiente forma:

$$dr_t = \theta(\hat{\mu} - r_t)\,dt + \sigma\,dw_t\,. \tag{B11}$$

Con lo que $\hat{\mu}$ pasaría a ser la media de largo plazo ajustada por riesgo. Cuando se utiliza el modelo de Vasicek, se puede encontrar una expresión para el precio de un bono de descuento que en el periodo *t* promete entregar \$1 en *T*:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)} \tag{B12}$$

donde $r(t)$ es el valor de la tasa instantánea en *t*,

$$B(t,T) = \frac{1-e^{-\theta(T-t)}}{\theta} \tag{B13}$$

y

$$A(t,T) = \exp\left[\left(B(t,T)-(T-t)\right)\left(\hat{\mu}-\frac{\sigma^2}{2\theta^2}\right)-\frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4\theta}\right]. \tag{B14}$$

Estas últimas tres ecuaciones, junto con la ecuación (B5), nos permitirían encontrar toda la curva de tasas cero. Asimismo, permiten valorar cualquier bono libre de riesgo, si consideramos que éste no es más que un portafolio de bonos cero cupón.

REFERENCIAS

AMIN y JARROW, (1992), "Pricing American Options on Risky Assets in a Stochastic Interest Rate Economy", *Mathematical Finance*, Volume 2, Number 4.

ARCHARYA, V., and J. CARPENTER, (2002), "Corporate Bond Valuation And Hedging with Stochastic Interest Rates and Endogenous Bankruptcy", *Review of Financial Studies* 15, 1355-1383.

BARRAQUAND, J. and D. MARTINEAU, (1995), "Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 30:3, 383-405.

BLACK, F., and J. C. COX, (1976), "Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions", *Journal of Finance* 31, 351-367.

BLACK, F., and M. SCHOLES, (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy* 28, 637-654.

BRENNAN, M.J., and E.S. SCHWARTZ, (1977a), "Convertible Bonds: Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion", *Journal of Finance* 32, 1699-1715.

BRENNAN, M., and E. SCHWARTZ, (1977b), "Savings Bonds, Retractable Bonds and Callable Bonds", Journal of Financial Economics 5, 67-88.

BRENNAN, M.J., and E.S. SCHWARTZ, (1980), "Analyzing Convertible Bonds", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 15, 907-929.

BROADIE, M. and P. GLASSERMAN, (1997), "Pricing American-Style Securities Using Simulation", *Journal of Economic Dynamics and Control* 21: 8 and 9, 1323-1352.

BRYS, E., and F. de VARENNE, (1997), Valuing Risky Fixed Rate Debt: An Extension", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 32, 239-248.

CASTILLO, A., (2004), "Firm and Corporate Bond Valuation: A Simulation Dynamic Programming Approach", Cuadernos de Economía 41, Nº 124, 345-360.

CHAN, K., A. KAROLYI, F. LONGSTAFF, and A. SANDERS, (1992), "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate", *The Journal of Finance*, Vol.47, No. 3, Papers and Proceedings of the Fifty-Second Annual Meeting of the American Finance Association, New Orleans, Luoisiana, January 3-5, 1209-1227.

COLLIN - DUFRESNE, P., and R.S. GOLDSTEIN, (2001), "Do Credit Spreads Reflect Stationary Leverage Ratios?", *Journal of Finance*, Volume LVI, Number 5.

COURTADON, G., (1982), "The Pricing of Options on Default-Free Bonds", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 17, 75-100.

COX, J.C., J.E. INGERSOLL, and S.A. ROSS, (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", Econometrica 53, 385-407.

DAS, S.R., and R.K. SUNDARAM, (2000), "A Discrete-Time Approach to Arbitrage-Free Pricing of Credit Derivatives", *Journal of Management Science* 46-1, 46-63.

DUFFIE, D., and M. HUANG, (1996), "Swap Rates and Credit Quality", *Journal of Finance* 51, 921-949.

DUFFIE, D., and K. SINGLETON, (1999), "Modeling Term Structures of Defaultable Bonds", *Review of Financial Studies* 12, 687-720.

GESKE, R., (1977), "The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options", *Journal of Financial and Quantitative Economics* 12, 541-552.

HO, T.S., R.C. STAPLETON, and M.G. SUBRAHMANYAM, (1997), "The Valuation of American Options on Bonds", *Journal of Banking and Finance* 21, 1487-1513.

HULL, J. C., (1997), "Options, Futures, and Other Derivatives", Third Edition, *Prentice Hall*

JARROW, R.A., D. LANDO, and S. TURNBULL, (1997), "A Markov Model for the Term Structure of Credit Spreads", *Review of Financial Studies*, Volume 10, 481-523.

JARROW, R.A., and S. TURNBULL, (1995), "Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Default Risk", *Journal of Finance*, Vol. 50, Nº. 1, 53-85.

JORGENSEN, P.L., (1997), "American Bond Option Pricing in One-Factor Dynamic Term Structure Models, Review of Derivatives Research 1, 245-267.

KIM, I.J., K. RAMASWAMY, and S. SUNDARESAN, (1993), "Does Default Risk in Coupons Affect the Valuation of Corporate Bonds?: A Contingent Claims Model", Financial Management, special issue on Financial Distress.

KING, D., and D. MAUER, (2000), "Corporate Call Policy for Nonconvertible bonds", *The Journal of Business*, Vol. 73, No. 3, 403-444

KRAUS, A., (1983), "An Analysis of Call Provisions and the Corporate Refunding Decision", *Midland Corporate Finance Journal* 1, Spring 1983, 46-60.

LONGSTAFF, F.A., and E.S. SCHWARTZ, (1995), "A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt", *Journal of Finance* 50, 789-819.

LONGSTAFF, F.A., and E.S. SCHWARTZ, (2001), "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Square Approach", *Review of Financial Studies* 14:1, 113-147 (Spring).

LONGSTAFF, F.A., and B. TUCKMAN, (1994), "Calling Nonconvertible Debt and the Problem of Related Wealth Transfer Effects", *Financial Management* 23, 21-27.

MADAN, D., and H. UNAL, (1993), "Pricing the Risk of Default", Working Paper, University of Maryland.

MAUER, D.C., (1993), "Optimal Bond Call Policies Under Transaction Costs", *Journal of Financial Research* 16, 23-37.

MERTON, R., (1973), "Theory of Rational Option Pricing", *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, No. 1, 141-183.

MODIGLIANI, F., and M. MILLER, (1958), "The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment", American Economic Review 48, 261-297.

MOLINARE, A., 2002, "Estructura y dinámica de tasas de interés reales en Chile: Información contenida en los pagarés reajustables con pagos en cupones del Banco Central", *Tesis de Magíster en Ciencias de la Ingeniería*, Pontificia Universidad Católica de Chile.

MORENO, M., and J.F. NAVAS, (2003), "On the Robustness of Least-Squares Montecarlo (LSM) for Pricing American Derivatives", *Review of Derivatives Research*, 6, 2, 107-128.

NIELSEN, L.T., J. SAA-REQUEJO, and P. SANTA-CLARA, (1993), "Default Risk and Interest Rate Risk: The Term Structure of Default Spreads", Working Paper 05-93, INSEAD.

PETERSON, S., R.C. STAPLETON, and M.C. SUBRAHMANYAM, (1998), "A Two-Factor Lognormal Model of the Term Structure and the Valuation of American-Style Options on Bonds, Working Paper, New York University.

RAMASWAMY, K., and S. SUNDARESAN, (1986), "The Valuation of Floating-Rate Instruments: Theory and Evidence", *Journal of Financial Economics* 17, 251-272.

RAYMAR, S. and M.J. ZWECHER, (1997), "Montecarlo Estimation of American Call Options on the Maximum of Several Stocks", Journal of Derivatives 5:1, 7-23.

STENTOFT, L., (2004), "Assessing the Least Squares Montecarlo Approach to American Option Valuation", *Review of Derivatives Research* 7 (3), 129-168.

VU, J., (1986) "An Empirical Investigation of Calls of Non-convertible Bonds", *Journal of Financial Economics*, Vol. 16, June 1986, 235-265.